第2章 完全信息静态博弈

聂辉华 教授
中国人民大学经济学院
www.niehuihua.com
Niehuihua(at)vip.163.com

2.1 优势策略均衡

我们先考虑最简单的完全信息静态博弈，然后逐步放松假设。先考虑纯策略的标准式博弈（normal-form game），然后考虑混合策略或随机策略。在纯策略博弈中，参与人选择一个确定的行动，并且自然不会扰动（没有随机变量）。一个标准式博弈包括三个要素：参与人、纯策略集合和收益函数集合，即$\left\langle N,\{S_i\}_{i=1}^n,\{v_i(\bullet)\}_{i=1}^n\right\rangle$。对于有限的标准式博弈（参与人和行动集合都是有限的），通常用博弈矩阵来表示。

2.1.1 滴滴和快的合并

2015 年 2 月 14 日，在情人节那天，两大网约车巨头滴滴和快的宣布合并为一家企业，名称就叫滴滴。为什么两家水火不容的企业突然就合并了呢？2015 年，腾讯创始人马化腾在香港大学的演讲透露了背后的秘密。马化腾说，我支持滴滴，马云支持快的。我们就像打仗，一天大概亏损 2000 万，再炒到 3000 万，我也跟，最高一天亏 4000 万。谁也不敢收手，一收手就前功尽弃了。后来我跟马云沟通，最后在很多资本方【华兴资本包凡】的撮合下合并了。——摘自《一切皆契约：真实世界中的博弈与决策》，聂辉华，上海三联出版社，第 4 讲“信号发射”。

问题：两家巨头为什么要合并？它们陷入的困境是否普遍存在？

2.1.2 囚徒困境

此经典案例由 Tucker（1950）提出。如图 2－1 所示。实际上每个“矩阵”都是双矩阵，因为每个矩阵框（matrix entry）都对应了两个数值。注意理解故事背景以及现实意义，“0”可理解为缓刑。

解法：划线法

		2	
		坦白	抵赖
1	坦白	<u>−8，−8</u>	0，−10
	抵赖	−10，0	−1，−1

图 2－1 囚徒困境

		2	
		坦白	抵赖
1	拷打	8，−10	<u>6，−6</u>
	说理	0，0	0，−1

图 2－2 单边优势

2.1.3 定义优势策略均衡

The strategy s_i^* is a **dominant strategy** *if it is a player's strictly best response to* any *strategies the other players might pick, in the sense that whatever strategies they pick, his payoff is highest with s_i^*. Mathematically,*

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) > \pi_i(s_i', s_{-i}) \;\; \forall s_{-i}, \;\; \forall s_i' \neq s_i^*. \tag{3}$$

A **dominant-strategy equilibrium** *is a strategy profile consisting of each player's dominant strategy.*

背后的直觉是，“以不变应万变”。并且，我们有

命题：如果一个博弈$\left\langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\bullet)\}_{i=1}^n \right\rangle$存在优势策略均衡$s^D$，那么$s^D$就是惟一的优势策略均衡，并且也是惟一的纳什均衡。

证明过程略（作业）。

2.1.4 说明

（1）定义：收益≠均衡；均衡是“每个人都选择坦白”，即（坦白，坦白），而不是（-8，-8）。

（2）优点：当所有各方都有优势策略时，唯一的均衡就是优势策略均衡。此时，只要求局中人是理性的，不要求把理性作为“共同知识”。当只有一方有优势策略，而另一方没有时，此时需要理性作为共同知识。图 2－2 中，1 为警察，2 为囚犯。警察的优势策略是拷打，而囚犯没有优势策略，均衡为（拷打，抵赖）。因此，除非囚犯意识到警察是理性的，并且对方也如此，无限如此循环（“你知道我知道…”），否则结果也可能是（拷打，坦白）。*（当只有两种行动时，一方有优势策略，实际上也就意味着他有严格劣策略。）*

（3）缺点：只有极少数博弈存在优势策略。如图 2－3，在这样的博弈（或零和博弈）中双方都没有优势策略，但并不意味着均衡不存在。

		乙	
		右	左
甲	左	－1，－1	1，1
	右	1，1	－1，－1

图 2－3 交通博弈

		滴滴	
		降价	不降
快的	降价	0，0	12，－10
	不降	－10，12	5，5

图 2－4 寡头定价

2.1.5 应用

囚徒困境具有两个特点：（1）存在优势策略均衡；（2）个体利益最大化导致集体利益最小化。它广泛体现于寡头定价[1]（图 2－4）、军备竞赛（图 2－5）、公地悲剧/污染排放（图 2－6）、团队生产（搭便车）等多个方面。

[1] 这实际上是 Bertrand 价格竞争模型。

		巴基斯坦	
		核武	无核
印度	核武	<u>−5，−5</u>	10，−10
	无核	−10，10	5，5

图 2－5 军备竞赛

		牧民乙	
		1 只	2 只
牧民甲	1 只	500，500	300，600
	2 只	600，300	<u>400，400</u>

图 2－6 公地的悲剧[①]

思考：AI 能否帮助人类走出囚徒困境？请阅读有关算法合谋的论文。

作业：如何理解囚徒困境与“看不见的手”之间的矛盾？（电影《美丽心灵》片段）

2.1.5 走出囚徒困境

从社会福利或整体利益的角度讲，囚徒困境不是帕累托最优的，但这与理性人的假设并不矛盾。重要的是寻找解决问题的思路。“以往的哲学家只是解释世界，而问题在于改造世界”（马克思）。

（1）抵押：战国时的质子。
（2）报复：黑社会（mafia）。
（3）声誉（reputation）：重复博弈。
（4）文化：宗教与意识形态投资，如天地会的口号“反清复明”。
（5）第三方实施：借债时的“中人”。
思考：还有什么办法？

2.1.6 利用囚徒困境

警察审讯（“黑打”成招）；审计博弈；采购压价。

参考：《边际谋杀》，马歇尔·杰文斯（Marshall Jevons）。

2.2 重复剔除的优势均衡

如果双方都存在优势策略，那么均衡就是优势策略均衡。当没有一方有优势策略时，如何找到均衡？划线法还适用吗？

现实生活中有很多搭便车（free-ride）现象，比如小股东（股民）从来不参与公司治理，这是理性行为吗？中国的小微制造业企业很少搞研发。根据 1998-2007 年中国工业企业数据库，只有 9%的企业从事自主研发，并且研发的额度与企业规模高度正相关（聂辉华等，2008，《创新、企业规模和市场竞争》）。如何解释这种现象？

2.2.1 智猪博弈

假设一个猪圈的一侧有一头大猪和一头小猪，猪圈的另一侧有一个提供食物的按钮。猪每按一次按钮，出现 10 个单位食物，但是跑动成本为 2 个单位。赢利矩阵如图 2－7。

[①] 这是 Hardin（1968）发表在 *Science* 上但是被经济学引用最多的例子。

		小猪	
		按键	等待
大猪	按键	5，1	4，4
	等待	9，－1	0，0

图 2－7 智猪博弈

		小企业	
		研发	模仿
大企业	研发	50，20	40，30
	模仿	60，－10	0，0

图 2－8 研发博弈

此博弈中，大猪没有优势策略，但是小猪有优势策略。在只有两种行动时，这等同于小猪有劣策略（dominated strategy）[1]。（严格）劣策略定义：

The strategy s_i^d *is a* **dominated strategy** *if it is strictly inferior to some other strategy no matter what strategies the other players choose, in the sense that whatever strategies they pick, his payoff is lower with* s_i^d*. Mathematically,* s_i^d *is dominated if there exists a single* s_i' *such that*

$$\pi_i(s_i^d, s_{-i}) < \pi_i(s_i', s_{-i}) \ \ \forall s_{-i}. \tag{2}$$

命题：一个理性的参与人永远不会选择一个严格劣策略。

根据理性人定义，以上命题自然得证。不过，这一博弈过程不仅要求理性假设，而且要求理性是共同知识。否则，（等待，按键）也可能成为博弈结果。

既然“按键”是小猪的劣策略，那么理性的小猪就永远不会使用它，而理性的大猪也会预见到这点。这是一种“信念”（belief）。于是，剔除带有小猪“按键”的那一列。此时，给定小猪选择“等待”，大猪的最佳策略是“按键”。于是，均衡为（按键，等待）。

试用划线法，找出智猪博弈的均衡。

2.2.2 说明

（1）智猪博弈的**特征**是一方存在劣策略，同时其中一方可能搭便车。

（2）案例：企业的研发行为（图 2－8）、广告；大股东和小股东。

（3）解决搭便车的办法：界定产权（不能解决外部性）、制定法律（不允许集体诉讼）、道德谴责等。

2.2.3 重复剔除的优势均衡

有时需要多次剔除劣策略，才能找到均衡。我们定义重复剔除的优势策略均衡：一个重复剔除的优势均衡（an iterated-dominance equilibrium）是一个策略组合，它通过不断剔除严格劣策略直到仅剩下一个策略为止。

说明：

（1）确保最后只有一个策略组合。有时，我们也说该博弈是优势可解的（dominance-solvable）。实际上，直接选择优势策略与剔除严格劣策略是等价的。在剔除严格劣策略的过程中，可能会发现新的严格劣策略。这一过程直到不再发现严格劣策略为止。

[1] 当行动集有两个以上的行动时，这并不是等价的。

（2）重复剔除严格劣策略（IESDS）的方法不仅适用于离散模型，而且适用于连续模型（如古诺均衡）。它与可理性化（rationalizability）几乎是等价的。

（3）IESDS并不能保证结果是帕累托最优的，因为理性人可能忽视外部性。

类似地，我们给出弱劣策略的定义：

Strategy s_i' is **weakly dominated** *if there exists some other strategy s_i'' for player i which is possibly better and never worse, yielding a higher payoff in some strategy profile and never yielding a lower payoff. Mathematically, s_i' is weakly dominated if there exists s_i'' such that*

$$\begin{aligned} &\pi_i(s_i'', s_{-i}) \geq \pi_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall s_{-i}, \text{ and} \\ &\pi_i(s_i'', s_{-i}) > \pi_i(s_i', s_{-i}) \quad \text{for some } s_{-i}. \end{aligned} \tag{4}$$

2.2.4 重复剔除弱劣策略：俾斯麦海战役

此役发生于 1943 年的南太平洋。日本海军上将木村带领日军穿越俾斯麦海，要选择走较长的南线或较短的北线。而美军上将肯尼要决定派飞机往哪条路线上轰炸。

		木村	
		北	南
肯尼	北	<u>3，－2</u>	2，－2
	南	1，－1	3，－2

图 2－9 俾斯麦海战役

		列		
		c_1	c_2	c_3
行	r_1	2，12	1，10	1，12
	r_2	0，12	0，10	0，11
	r_3	0，12	0，10	0，13

图 2－10 剔除路径博弈

2.4.5 重复剔除弱劣策略的问题

（1）“无差异”与“剔除”本身是矛盾的。这是所谓的“开集”问题。

（2）唯一性问题。如果剔除的是弱劣策略，那么剔除的顺序可能会影响最终结果。例如图 2－10，r_2、r_3 都是行的弱劣策略。如果按照（r_3，c_3，c_2，r_2）的顺序逐步剔除弱劣策略，那么剩下的均衡是（r_1，c_1）；如果按照（c_2，r_2，c_1，r_3）的顺序，那么剩下的均衡是（r_1，c_3）。实际上，直接剔除（对列而言的）严格劣策略 c_2，再剔除（对行而言的）严格劣策略 r_2 和 r_3，就可以得到上述两个均衡。均衡缺乏稳定性，导致博弈论的解释能力和预测能力大打折扣。因此，我们一般使用剔除（严格）劣策略方法，但用这种方法该博弈是不可解的。

2.3 纳什均衡

2.3.1 礼物战与纳什均衡

我们已经掌握了三个解的概念：优势策略、IESDS 或者可理性化。然而，有些博弈既没有优势策略，又没有（严格）劣策略。那么此时如何找到均衡呢？

下列博弈改编自欧·亨利的小说《麦琪的礼物》。故事说的是，在圣诞节丈夫卖掉了怀表，给妻子买来了梳子做礼物；而妻子卖掉了头发，给丈夫买来了表链。博弈矩阵如图 2

－11。为什么会出现这种情况呢？当事人如果是理性的，那么他们的行为和信念应该是一致的。问题就在于，他们的信念是错误的！因此，我们将对信念施加更多限制。

		妻子：剪发	妻子：不剪
丈夫	卖表	0，0	2，1
丈夫	不卖	1，2	0，0

图 2－11 礼物战 I

		女：拳击	女：芭蕾
男	拳击	2，1	0，0
男	芭蕾	0，0	1，2

图 2－12 性别战

通过“划线法”，我们知道均衡为（卖表，不剪）和（不卖，剪发）。关键在于，我们是通过给定对方的选择确定自己的最佳选择，而一旦自己的选择是最佳的，并且对方也这么认为，这其实就是纳什均衡的概念（Nash，1950）。下面正式地给出**定义**：

The strategy profile s^* is a **Nash equilibrium** *if no player has incentive to deviate from his strategy given that the other players do not deviate. Formally,*

$$\forall i,\quad \pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \pi_i(s_i', s_{-i}^*),\quad \forall s_i'. \tag{5}$$

以上是弱纳什均衡，如果将不等式改成严格不等式，则均衡为强（或严格）纳什均衡。但是，Tadelis（2012）增加了一个条件：每个参与人关于对方的信念必须是正确的。

2.3.2 性别战

如图 2－12。两个博弈相同的地方在于：（1）存在多重均衡，而且双方各自偏向一个均衡；（2）任何一个均衡结果都是帕累托最优的。信念扮演了重要的作用。在这个博弈中，假设男方是一个有名的拳击手，而女方也知道这点，那么（拳击，拳击）应该是一个均衡结果，而（芭蕾，拳击）不应该出现。

2.3.3 斗鸡博弈

如图 2－13。与性别战不同的是，斗鸡博弈的结局是没有人愿意屈服，也没有帕累托改进的结果。这是一种零和博弈，这说明不是所有的时候科斯定理都起作用。案例：开车加塞。

		乙：进	乙：退
甲	进	－2，－2	4，－1
甲	退	－1，4	0，0

图 2－13 斗鸡博弈

		琼斯：iOS	琼斯：安卓
史密斯	iOS	**2，2**	－1，－1
史密斯	安卓	－1，－1	**1，1**

图 2－14 协调博弈

2.3.4 协调博弈

如图 2－14，游戏制作公司史密斯和广告制作公司琼斯独立地决定选择为何种智能手机操作系统服务。若两家公司选择同样的操作系统，双方的业绩都会更好。

特征：存在多重均衡，但是一些均衡帕累托优于另一些均衡，这与性别战和斗鸡博弈都不同。

提示：一定要注意不同博弈模型的结构性特征，而不是过于关注具体数字。

思考：现实生活中有哪些博弈是性别战、斗鸡博弈和协调博弈？

2.3.5 纳什均衡、优势策略均衡和重复剔除的优势均衡

关系：纳什均衡 $\supset$ 重复剔除的优势均衡 $\supset$ 优势策略均衡

[注 1] 重复剔除的优势均衡和优势策略均衡一定是纳什均衡，反之则未必。因为纳什均衡是非合作博弈最基本的均衡。

[注 2] 对于重复剔除严格劣策略均衡而言，被剔除掉的不可能是纳什均衡；但是对于重复剔除弱劣策略均衡而言，有可能纳什均衡被剔除掉，如图 2－11。

2.3.6 纳什均衡的多重性

几种解决多重均衡的途径：

（1）廉价汇报（cheap talk），即无成本的信息沟通，如协调博弈。

（2）学习（learning by doing）。通过日积月累的经验观察，获得关于对方类型或行动的更多信息，如性别战。

（3）相关均衡（correlated equilibrium）。参与人根据某个观测到的共同信号采取行动，比如红绿灯，由 2005 年诺奖得主 Aumann 提出。

（4）聚点（focal points）。由 2005 年诺奖得主 Schelling 提出，即参与人根据某种习惯、文化或观念会更多地选择某种行动。例如公平、地域、信仰等都会有助于预测均衡。

（5）对信念进行限制，或者施加更严格的假设（均衡精炼）。

2.4 混合策略

2.4.1 楔子

为什么《麦琪的礼物》中，男女主人公都没有选择均衡策略？图 2－15 的猜币博弈似乎没有均衡？类似地，猜拳博弈有均衡吗？要找到均衡，我们必须引入混合策略。这不仅扩展了参与人的行动集合，而且更为现实地刻画了参与人面临的不确定环境。

		乙	
		正	反
甲	正	1，－1	－1，1
	反	－1，1	1，－1

图 2－15 猜币博弈

		麦琪	
		剪发（q）	不剪（1-q）
丈夫	卖表（p）	0，0	2，1
	不卖（1-p）	1，2	0，0

图 2－16 礼物战 II

2.4.2 混合策略定义

A **pure strategy** *maps each of a player's possible information sets to one action.* $s_i : \omega_i \rightarrow a_i$.

A **mixed strategy** *maps each of a player's possible information sets to a probability distribution over actions.*

$$s_i : \omega_i \rightarrow m(a_i), \ \ where \ \ m \geq 0 \ \text{ and } \int_{A_i} m(a_i) da_i = 1.$$

A **completely mixed** *strategy puts positive probability on every action, so* $m > 0$.

可见，混合策略其实就是纯策略的概率分布。或者，纯策略可以看作是混合策略的退化形式。由混合策略组成的最佳策略组合，就是混合策略均衡。那么，在混合策略均衡中，参与人如何选择其行动呢？答案如下。

命题：假如σ^*是一个纳什均衡，并且s_i和s_i'都在σ_i^*的支撑集（support）中，那么$v_i(s_i,\sigma_{-i}^*)=v_i(s_i',\sigma_{-i}^*)=v_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*)$。

背后的直觉是，如果两种纯策略的期望收益不相等，那么就没有必要使用另一种纯策略，从而混合策略就不是最优反应，这与混合策略均衡的定义矛盾。举例：跟踪博弈。

2.4.3 混合策略解法一：收益等价法

回到《麦琪的礼物》博弈，见图 2－16。[①]若每个人都想制造惊喜，则混合策略最好。

丈夫卖表的期望收益为：$v_1(s,q)=0\times q+2\times(1-q)=2-2q$；

丈夫不卖的期望收益为：$v_1(s',q)=1\times q+0\times(1-q)=q$；

妻子剪发的期望收益为：$v_2(c,p)=0\times p+2\times(1-p)=2-2p$；

妻子不剪的期望收益为：$v_2(c',p)=1\times p+0\times(1-p)=p$。

混合策略均衡要求，参与人在所有行动之间的期望收益相等。否则，$v_1(s,q)>v_1(s',q)$，丈夫将选择卖表；反之选择不卖。因此$v_1(s,q)=v_1(s',q)$，即$2-2q=q$，$q^*=\frac{2}{3}$；同理，$p^*=\frac{2}{3}$。要保证参与人 1（丈夫）在两种行动之间无差异，必须对参与人 2（妻子）施加一个限制，当且仅当参与人 2 选择剪发的概率 q=2/3。类似地，参与人 2 在两种行动（剪发和不剪）之间无差异时，参与人 1 选择卖表的概率 p=2/3。根据纳什均衡的定义，双方在给定对方行动的前提下最优化自己的行动，并且对方也这么认为。因此该博弈的混合策略均衡为

[①] 参考董志强（2007）。

{（$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$），（$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$）}，即丈夫以 2/3 的概率卖表，以 1/3 的概率不卖表；妻子以 2/3 的概率剪发，以 1/3 的概率不剪发（注意混合策略均衡的表达方式）。如图 2－17。

丈夫 \ 妻子	剪发 q	不剪
卖表 p	$\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$
不卖	$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$

图 2－17 礼物战 II-a

结果发生的概率

4/9	2/9
2/9	1/9

图 2－17 礼物战 II-b

以上分析证明，最有可能的结局（均衡结果）恰恰是小说中发生的结局！由此可见，引入混合策略能够有效地提高解释力。

概括一下混合策略的求解思路：

（1）问参与人 2 选择什么策略会使得参与人 1 在多种纯策略之间是无差异的；

（2）问参与人 1 选择什么策略会使得参与人 2 在多种纯策略之间是无差异的；

（3）将双方的最佳策略组合起来，得到混合策略均衡。

2.4.4 混合策略解法二：最大值法

Buchanan 和 Tullock 等公共选择理论专家提出了一个“救济悖论”，有点像现在的“廉租房”。这一案例充分说明了不对称信息是如何影响了政策的制定以及社会的福利水平。如图 2－18。

政府 \ 贫民	找工作	流浪
救济	3，2	－1，3
不救济	－1，1	0，0

图 2－18 救济博弈

史密斯 \ 琼斯	坚持 q	避让 1-q
坚持 p	－3，－3	**2，0**
避让 1-p	**0，2**	1，1

图 2－19 斗鸡博弈

上述博弈没有纯策略均衡，因此我们不能使用划线法。假设政府救济的概率为 p，贫民找工作的概率为 q，则政府的期望收益为：

$$\pi_G = p[3q + (-1)(1-q)] + (1-p)[-1q + 0(1-q)] = p(5q-1) - q$$

在**必然得到**混合策略的情况下，p、q 都是连续的（且不为 0），因此对上式求 p（内生变量！）的一阶导数，得：

$$\frac{d\pi_G}{dp} = 5q - 1 = 0$$

所以，$q^* = 0.2$。同理，贫民的期望收益为：

$$\pi_P = q[2p + 1(1-p)] + (1-q)[3p + 0(1-p)] = q(1-2p) + 3p$$

$$\frac{d\pi_P}{dq} = 1 - 2p = 0\text{，}\ p^* = 0.5\text{。}$$

若贫民以 20%的概率找工作，则政府是否救济没有差异；但如果政府的行为是确定的，则贫民的随机化策略不是最佳的。所以，当政府以 50%的概率救济，而贫民以 20%的概率找工作时才形成一个均衡。当贫民找工作的概率小于 20%时，政府不会救济。

思考：**两种方法**的差异。如果存在纯策略，能使用最大值法吗？

2.4.5 对混合策略的几种解释

（1）增加了对非均衡的博弈结果的解释力，如礼物战。例如在社会心理学中声名狼藉的“吉蒂谋杀案”。吉蒂在纽约被谋杀时，她的 38 位邻居居然没有一人报警。如图 2－20。

		琼斯	
		旁观	报警
史密斯	旁观 p	0，0	**10，7**
	报警 1-p	**7，10**	7，7

图 2－20 市民责任博弈

此博弈有两个非对称的纯策略纳什均衡（报警，旁观）和（旁观，报警），还应该有一个对称的混合策略纳什均衡。为求混合策略，根据其对称性，可以假定旁观的概率为 p。假设有 N 个市民，则除史密斯之外，其余市民（作为另一个参与人）旁观的概率为 p^{N-1}，报警的概率为 $1-p^{N-1}$。使用收益等价法，有

$$\pi_{\text{遣摔}} = 7$$

$$\pi_{\text{颁懸}} = 0p^{N-1} + 10(1-p^{N-1}) = 10 - 10p^{N-1}$$

令两式相等，得：$p^{N-1} = 0.3$，故 $p^* = 0.3^{\frac{1}{N-1}}$，或 $p^{*N} = 0.3p^*$。显然，N 越大，无人报警的概率越大。若 $N = 2$，则 $p = 0.3$，无人报警的概率为 $p^2 = 0.09$。若 $N = 38$，$p^* \approx 0.97$，$p^{*N} \approx 0.29$，即旁观和无人报警的概率都上升了。当 $N \to +\infty$ 时，$p^* = 1$。

（2）是一种掩盖个人行动的策略，例如划拳博弈、跟踪博弈；

（3）在重复博弈中，选择某种行动的概率可以理解为次数；在单期博弈中，选择某种行动的概率可以成为影响对手的策略。

2.4.6 使用混合策略时的问题

（1）并非所有的博弈都一定存在混合策略，例如囚徒困境。又如图 2－19 这个斗鸡博弈。如果一开始就给参与人的行动赋予概率，又因为这是一个对称的博弈，可知 $p^*=0.25$。如果将收益矩阵左上脚的－3 换成 x，则我们有 $p^*=\frac{1}{1-x}$。当 $x=0.5$ 时，$p^*=2$，这显然是不合理的。问题出在哪里呢？当 $x=0.5$ 时，史密斯有一个优势策略——坚持，因此均衡应该只有一个——（坚持，避让）。因此，使用混合策略时，一定要先看是否存在优势策略或严格劣策略。使用收益等价法更容易遭遇这种错误，但是最大值法则可能通过线性求解而避免。

（2）对于对称的博弈矩阵，若使用收益等价法，只需要对其中一人的一种行为赋予概率；若使用最大值法，必须对两个人的同一行为赋予不同的概率（p、q），否则会出错。

（3）纯策略均衡不依赖于效用函数的性质，不管是基数效用还是序数效用同样成立。但是，混合策略均衡依赖于基数效用。

（4）不存在这样一种纳什均衡（思考题）：一方使用纯策略，而另一方使用混合策略；或者至少一方只在某些策略之间混合。

（5）奇数定理（oddness theorem）（Wilson，1971）：**几乎所有**有限博弈都有奇数个纳什均衡。这意味着，当我们找出了两个纯策略均衡时，通常还有一个混合策略均衡。这一定理的证明超出了本课程的范围。

2.5 连续策略

2.5.1 连续策略的意义

纯策略——>混合策略——>连续策略。连续策略表明，参与人的行动集合是一个连续的数值，例如价格、产量。连续策略是常态，表明参与人的行动是无穷多的。此时，策略式和展开式（博弈树）都难以表述，但是我们可以使用更为抽象的连续函数来表述，这类似于前面使用的求混合策略的最大值法。

连续策略相对于离散策略，更一般地刻画了变量之间的数量关系（勾股定理 vs. 毕达哥拉斯定理），而且可以在边际上考察某个变量对全局结果的影响（比较静态学）。

2.5.2 古诺模型

提问：厂商应该全部占领市场吗？为什么？

古诺模型由 Cournot（1838）年提出，是产业组织领域一个典型的寡头定价问题，也可以看做是最早的纳什均衡模型。考虑一个比 Rasmusen（1994，p84）更一般的模型（张维迎，1996，p75）。假设一个市场上有两个寡头厂商（例如中石油和中石化），生产同样的产品。令两个厂商的成本函数分别为 $C_1(q_1)=cq_1$ 和 $C_2(q_2)=cq_2$。逆需求函数为 $P=a-(q_1+q_2)$。每个厂商同时决定自己的产量，但是必须考虑到对方的行为。它们的利润函数为：$\pi_i=q_iP(q_1,q_2)-C(q_i)$。

在不同的产业结构下，两个厂商的最优产量分别是多少？社会福利如何？

（1）完全竞争

作为标尺，根据 $P = MC$ 的社会最优原则，我们有 $P = a-(q_1+q_2)=c$，即 $Q^{FB} = a-c$。

思考：若两个厂商边际成本不同呢？

（2）垄断

此时两个厂商联合为一家，象一个垄断者那样决策，因此总利润为：$\pi = Q_m(a-Q_m)-Q_m c$，由一阶条件得：$Q_m^* = \frac{1}{2}(a-c)$。

又问：若两个厂商边际成本不同，应该分别生产多少？

（3）寡头

它们都必须对对方行为的决策做最优反应，即一方的产量取决于对方的产量。在纳什均衡下，最优策略应该满足条件 $\frac{dq_j^*}{dq_i^*} = 0$，两个厂商的利润函数的一阶条件分别为：

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = P + q_1\left(\frac{\partial P}{\partial q_1} + \frac{\partial P}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1} = a-(q_1+q_2)-q_1-c = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a-(q_1+q_2)-q_2-c = 0$$

它们的反应函数（reaction function）或最佳对应函数（best response function）为：

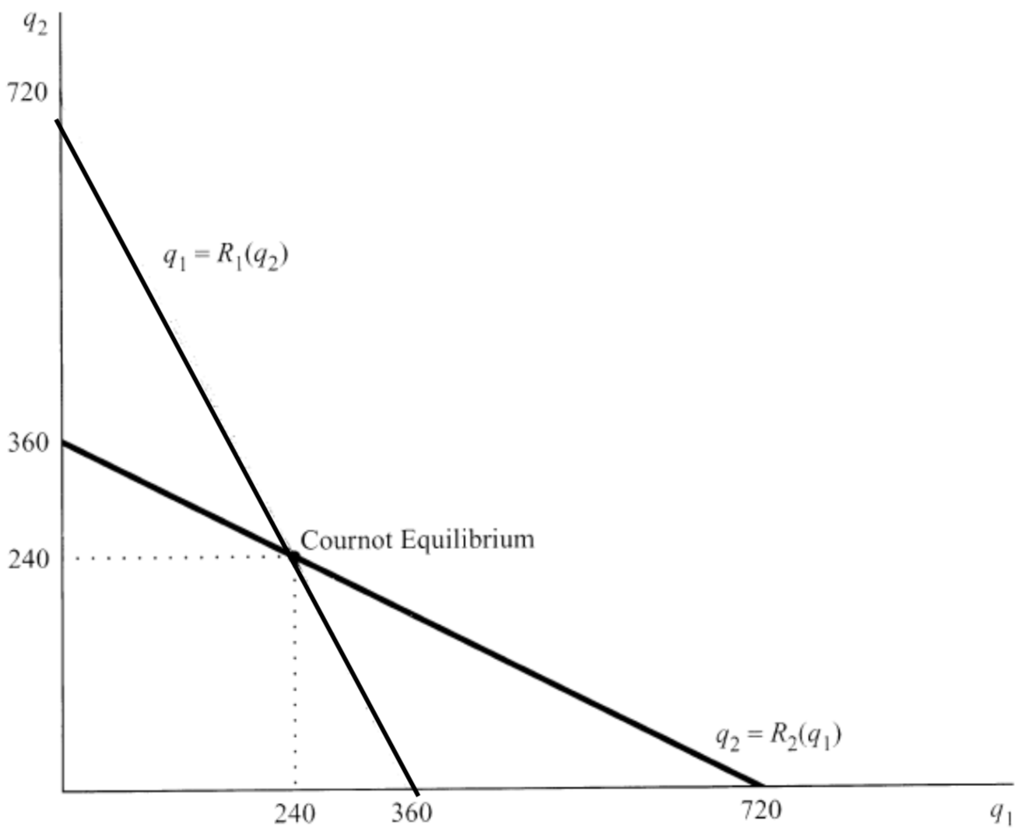
$$q_1^* = R_1(q_2) = \tfrac{1}{2}(a-q_2-c)$$

$$q_2^* = R_2(q_1) = \tfrac{1}{2}(a-q_1-c)$$

解得，$q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(a-c)$。

对比之后，不难发现，完全竞争的产量最大，其次是寡头，最后是垄断。原因之一在于寡头厂商只考虑本企业的利润，而忽视了自身产量对另一个企业的负外部性。当然，对消费者而言，这反而是好事。原因之二是需求定律。

下图是一个启发式解释，假设 $q_1=R_1(q_2)=360-q_2/2$。



思考：（1）古诺均衡与囚徒困境的关系？（2）能否用博弈矩阵表达这类“无限博弈”？（3）Olson 提出“小团体更容易采取集体行动”，这与古诺均衡似乎相反？

2.5.3 伯川德悖论

设有两个完全一样的寡头厂商，决策变量为价格。它们的边际成本为c，价格为 p 。可以证明，两家厂商博弈的结果，使得最后的价格一定是 $p=c$ 。试用策略式博弈矩阵证明。

寡头厂商最后居然按照完全竞争的格局定价，此即伯川德悖论（Bertrand Paradox）（Bertrand，1883）。对伯川德悖论的深入解释，参考 Tirole（1988）第 5.1、5.2 节。

伯川德模型不是只能适用于产品同质的情况。现在假设两个厂商的产品不是完全替代的，需求函数为$q_i(p_i,p_j)=a-p_i+bp_j$ ，其中$0<b<2$ 。两个企业同时行动，**策略空间**为价格 $p_i\ge 0$ 。在均衡条件下，每个企业的最佳价格 p_i^* 应该是如下优化问题的解：

$$\max_{0\le p_i<\infty}\pi_i(p_i,p_j^*)=\max_{0\le p_i<\infty}(a-p_i+bp_j^*)(p_i-c)$$

解得 $p_i^*=\frac{1}{2}(a+bp_j^*+c)$ 。将$i=1,2$代入，解这对方程式，得： $p_1^*=p_2^*=\frac{a+c}{2-b}$ 。

伯川德竞争的应用：价格战，例如中国南车和中国北车、滴滴和快的。

2.6 纳什均衡的存在性

2.6.1 纳什均衡的存在性

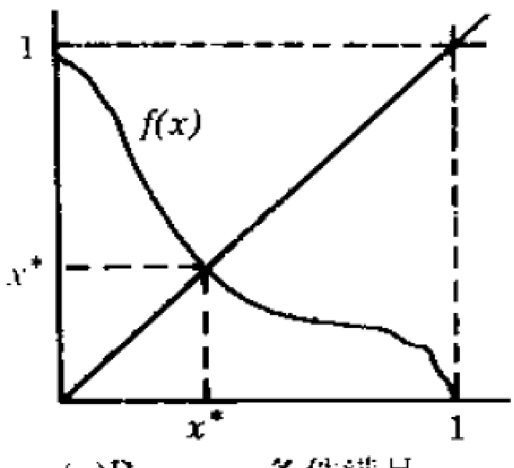
纳什均衡的存在性定理 I(纳什,1950):每一个有限博弈至少存在一个纳什均衡(纯战略的或混合战略的)。

纳什均衡的存在性定理 II(Debreu, 1952; Glicksberg, 1952; Fan, 1952):在 n 人战略式博弈中,如果每个参与人的纯战略空间 S_i 是欧氏空间上一个非空的、闭的、有界的凸集,支付函数 $u_i(s)$ 是连续的且对 s_i 是拟凹的,那么,存在一个纯战略纳什均衡。

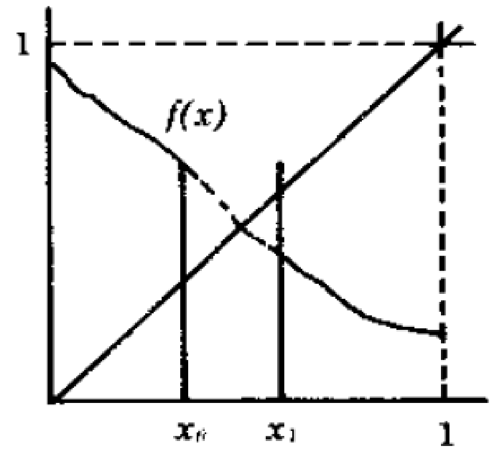
纳什均衡的存在性定理 III(Glicksberg, 1952):在 n 人战略式博弈中,如果每个参与人的纯战略空间 S_i 是欧氏空间上一个非空的、闭的、有界的凸集,支付函数 $u_i(s)$ 是连续的,那么,存在一个混合战略纳什均衡。

背后的基本思路是:证明存在一个 σ^*,使得 $\sigma^* \in r(\sigma^*)$,这就是纳什均衡的数学定义。以古诺模型为例,其中企业 1 的最优反应函数为 $q_1^* = R_1(q_2) = \frac{1}{2}(a-q_2)-c$,也可以写作 $q_1^* = g(q_2) = g(q_2(q_1)) = f(q_1)$,即存在一个函数是自身的映射。利用数学语言来说,就是在一定条件下,证明存在一个 $x^* = f(x^*)$。这“一定条件”往往是指充分条件,包括 X 是非空的、闭的、有界[①]的和凸的,$f(x)$ 是非空的、凸的和上半连续的(Kakutani不动点定理)。因此,我们的目的就是要证明一般的博弈符合上述条件。这一证明过程可以分解为两步:(1)证明纳什均衡是一种对应;(2)证明对应满足连续性条件。

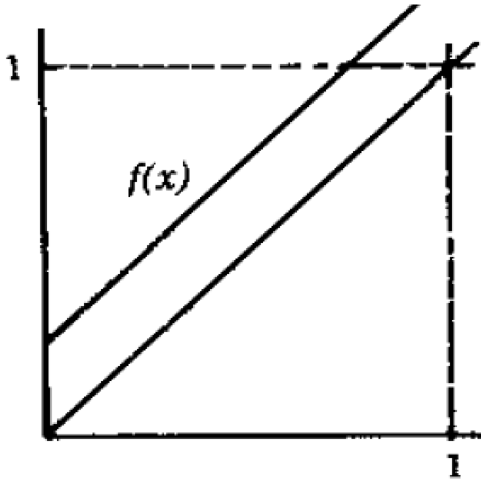
[①] 闭集是指集合中所有数的极限仍在集合内。有界是指集合中所有数都小于某个特定的值。



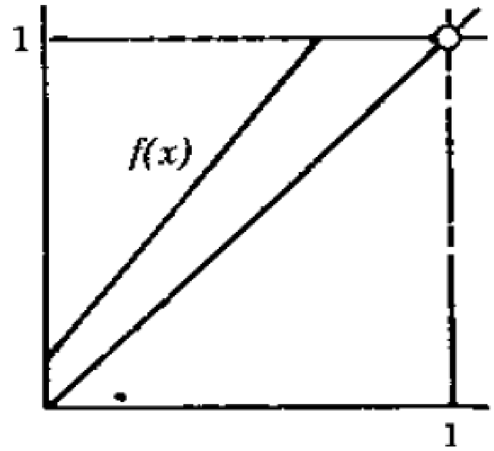
(a)Brouwer条件满足



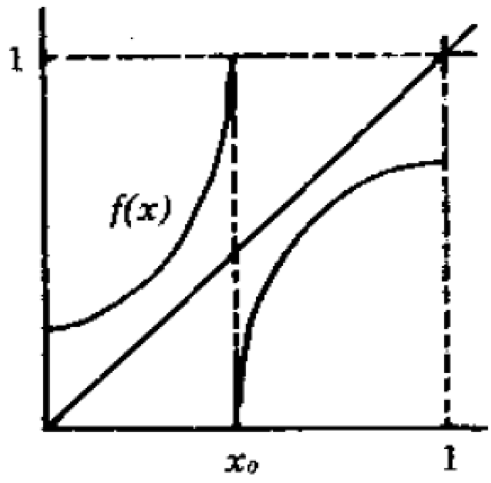
(b)x不是凸集



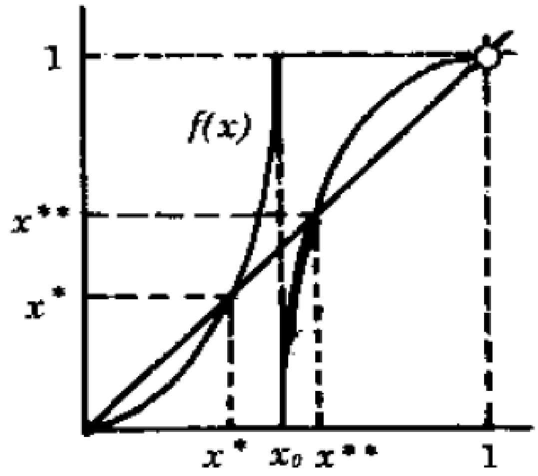
(c)x不是有界的



(d)x不是闭的



(e) $f(x)$ 不是连续的



(f) $f(x)$ 是非连续的，
x是非闭的，但不动点存在

2.6.2 小结

几个均衡概念的关系：

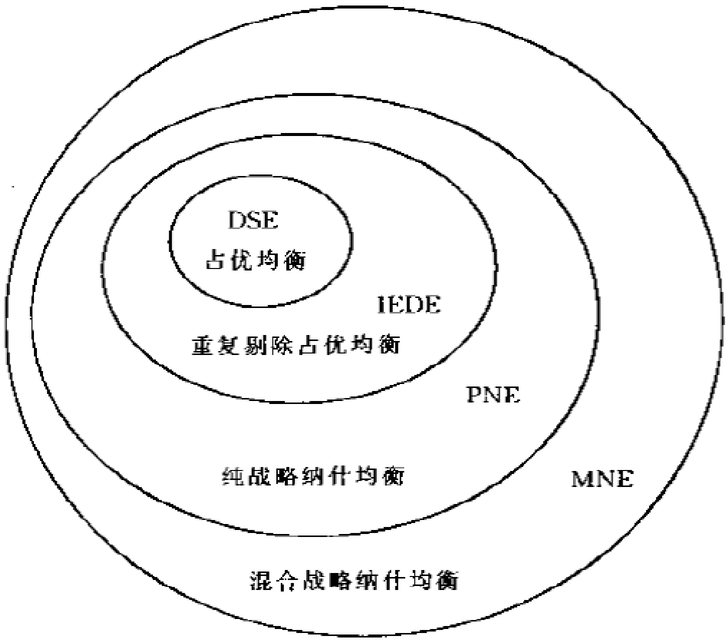


图 1.6　不同均衡概念之间的关系

作业：

每十人自行组成一个团队，自选角色分析美俄乌三方博弈，并派代表以 PPT 方式报告。